Charakteryzacja ACL, złożenia i inne

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\Omega)$, to również $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ oraz zachodzi wzór $\nabla|u| = \operatorname{sgn} u \nabla u$ w następującym sensie:

$$\nabla|u|(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{gdy } u(x) > 0, \\ -\nabla u(x) & \text{gdy } u(x) < 0, \\ 0 & \text{gdy } u(x) = 0. \end{cases}$$

Wywnioskować, że dla dowolnych $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ funkcje $\max(u, v)$, $\min(u, v)$ również należą do $W^{1,p}(\Omega)$.
Wskazówka. Rozważyć złożenie u z $f_\varepsilon(x) = (\varepsilon^2 + |x|^2)^{1/2} - \varepsilon$.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\Omega)$, to $\nabla u(x) = 0$ dla p.w. x ze zbioru $\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$.
Wskazówka. Tym razem rozważyć złożenie z funkcją $f_\varepsilon(x) \operatorname{sgn} x$.

Zadanie 3. Pokazać, że jeśli $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$ jest gładkim bilipszycowkim dyfeomorfizmem oraz $u \in W^{1,p}(\Omega')$, to $u \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega)$ oraz $\nabla(u \circ \Phi)(x) = \nabla u(\Phi(x))\nabla\Phi(x)$.

Zadanie 4. (nierówność Poincarégo) Pokazać, że jeśli obszar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest ograniczony, to

$$\int_\Omega |u|^p \leqslant C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^p$$

dla $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Wskazówka.* Rozważyć najpierw obszar $\Omega = \{x : -R < x_1 < R\}$.

Zadanie 5. Wprowadźmy na $\mathbb{R}^{n+m}$ współrzędne $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, a obszar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ potnijmy na n-wymiarowe plasterki $\Omega_y = \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{y\})$. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\Omega)$, to funkcja $u_y = u|_{\Omega_y}$ należy do $W^{1,p}(\Omega_y)$ dla prawie każdego $y \in \mathbb{R}^m$, ponadto pochodne u_y zgadzają się z obcięciami pochodnych u.

Zadanie 6. (charakteryzacja ACL) Wykazać, że w przypadku $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ każda funkcja $u \in W^{1,1}(\Omega)$ posiada reprezentanta, który jest absolutnie ciągły na prawie każdej prostej Ω_y. Sformułować i udowodnić odwrotne twierdzenie.

Zadanie 7. Wykazać, że złożenie $v = f \circ u$ funkcji $u \in W^{1,p}(\Omega)$ z funkcją lipszycowską $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ należy do $W^{1,p}(\Omega)$ (gdy Ω jest nieograniczona, zakładamy dodatkowo $f(0) = 0$). Ponadto $\partial_i v(x) = f'(x)\partial_i u(x)$ dla p.w. $x \in \Omega$, przy czym przyjmujemy $f'(x)\partial_i u(x) = 0$ w punktach, w których $\partial_i u(x) = 0$.